Problemas del sorteo del torneo de campeones de la UEFA

Enrique Castillo[1,2] y Javier Girón[2]

Royal Academy of Engineering[1], Don Pedro, 10, 28005 - Madrid, Spain
Royal Academy of Sciences[2], Valverde, 22, 28004 - Madrid, Spain

5 de marzo de 2022

1. El sorteo del torneo de campeones de la UEFA

La repetición del sorteo de la UEFA por haberse cometido algunos errores, fue un escándalo que no debió producirse, ya que aunque los hubo, éstos se corrigieron sobre la marcha, sin que tuvieran ningún efecto en el resultado final, como ha sido demostrado. Desgraciadamente, los responsables no se dieron cuenta de ello y repitieron el sorteo adulterando los resultados, en el sentido de que algunos equipos se habían hecho a la idea de un contrincante fácil o difícil, y de repente se les dice que les corresponden otros equipos. Imaginemos a alguien al que le toca el primer premio de la lotería y, seguidamente, le dicen que se han equivocado y que ya no le toca nada o un premio menor, o a los que no les toca nada y luego les dicen que les ha tocado el gordo.

Sin embargo, además de los problemas surgidos por el error, caben otras consideraciones que es importante señalar y que, algunas de ellas, son de aplicación general a todos los problemas matemáticos a los que se enfrenta la sociedad en su vida diaria. Una consideración de importancia es que estos problemas son generalmente mucho más complicados y difíciles de resolver de lo que las apariencias indican en un primer análisis de los mismos, por lo que corresponde resolverlos a expertos y no, a personas ajenas, que, aunque tengan conocimientos en otras áreas y una buena intuición, carecen de los conocimientos profundos necesarios para plantearlos correctamente y resolverlos adecuada y eficazmente.

1.1. Restricciones impuestas al sorteo

Con respecto al problema del sorteo, lo primero que hay que decir es que la UEFA ha puesto algunas condiciones que lo complican notablemente.

Las razones fundamentales por las que se imponen estas restricciones son varias, pero las principales se basan en darle un mayor interés al torneo y favorecer que los equipos más potentes alcancen la fase final para que aumenten tanto el atractivo como la recaudación económica asociados.

De hecho, la UEFA ha impuesto las siguientes restricciones al sorteo:

1. Deben enfrentarse un primero de grupo con un segundo de grupo.
2. No pueden enfrentarse equipos que hayan coincidido en el grupo previo.
3. No pueden enfrentarse equipos que proceden del mismo torneo que les da derecho a participar, es decir, que se hayan enfrentado ya en el torneo de acceso, que aquí se traduce en equipos de la misma nacionalidad.

La primera condición excluye enfrentamientos entre primeros o segundos de grupo.

La segunda condición excluye los enfrentamientos de prineros y segundos del mismo grupo.

La tercera condición excluye los enfrentamientos entre equipos que proceden del mismo torneo nacional, produciendo indirectamente un desequilibrio importante, ya que los contrincantes permitidos a los diferentes equipos son diferentes en número.

Estas condiciones, lejos de pensar que son débiles, son muy fuertes y hacen que unos equipos resulten favorecidos y otros, perjudicados en el sentido de enfrentarles a rivales teóricamente más débiles o más fuertes, respectivamente. Además, el problema matemático se complica mucho, por lo que debe ser resuelto por especialistas.

Conviene señalar que las tres condiciones anteriores juntas tienen de entrada una influencia muy grande en la asignación de probabilidades a los emparejamientos, pues asignan probabilidad nula de enfrentamiento a 15 de ellos que hubieran sido potencialmente posibles de no imponerlas. Esto hace que el Chelsea sólo pueda enfrentarse a 4 equipos, el Real Madrid a 5 y los demás a 6 ó 7.

Ya que estas tres reglas excluyen algunos enfrentamientos posibles entre equipos, por lo que no son equitativas, se puede uno preguntar si estas condiciones permiten una equidad relativa, en el sentido de que todos los enfrentamientos de cada equipo, permitidos por ellas, tienen la misma probabilidad.

En este sentido, las dos primeras reglas, sí permiten esa equidad relativa, es decir, que las probabilidades de que cada equipo se enfrente con sus contrincantes permitidos sea la misma.

Sin embargo, la tercera regla por sí sola o combinada con las otras dos conduce a que no haya ningún sorteo posible que garantice que las probabilidades de enfrentamientos entre los equipos permitidos sean idénticas.

Por tanto, en las condiciones de la UEFA, no se puede conseguir que el Chelsea tenga una probabilidad $1/4$ de enfrentarse a cada uno de sus posibles contrincantes, o que el Real Madrid la tenga de $1/5$ con los suyos, y que los demás tengan probabilidades correspondientes $1/6$ y $1/7$.

Además, para definir el problema del sorteo no basta con fijar el conjunto de los resultados permitidos, que se llama espacio muestral, y hay que completar esta información con una distribución de probabilidad de estos posibles resultados, es decir, fijar la probabilidad de cada uno de ellos. De no hacerlo, se dejaría un espacio para manipular el resultado del mismo o para asignar las probabilidades de forma arbitraria. Hay que señalar que hay infinitas formas de asignar esta probabilidad, por lo que la elección de una concreta de ellas debe justificarse con algún criterio de equidad.

Es importante comentar que estas probabilidades inevitablemente dependerán de los equipos que participen en el sorteo y de sus nacionalidades, lo que en principio no es conveniente por poder variar mucho de año a año.

Llama la atención el hecho de que se altere la equidad de esta forma tan exagerada, y que, al mismo tiempo, se haga un esfuerzo por diseñar un sorteo equitativo, en el que quedan ya muy poco margen de libertad para mejorar esa equidad, como se verá seguidamente.

Una posible distribución de probabilidad consiste en asignarles la misma probabilidad a todos los posibles resultados del sorteo. Este criterio de equidad podría parecer razonable, pero ni es el único, ni es el óptimo y puede haber muchos más. También es cierto que algunos criterios de equidad pueden ser imposibles de cumplir si existen restricciones, como en el caso que nos atañe.

Para comprobar la bondad de un determinado criterio se pueden representar en una tabla las frecuencias de los emparejamientos entre equipos asociados a una extracción aleatoria con esa probabilidad, analizar las probabilidades que resultan para los diferentes enfrentamientos entre equipos y decidir si esa asignación es satisfactoria.

Hay que señalar que los emparejamientos posibles de la extracción aleatoria a la que nos referimos deben proceder de los resultados finales de los sorteos aleatorios. Nótese que en cada sorteo se fuerza a que los 8 emparejamientos resultantes de cada uno de ellos deben incluir a los 16 equipos y a cada uno de ellos una y solamente una vez, y ésto condiciona las probabilidades de los emparejamientos. Si se hiciera de otra forma se estaría alterando la realidad del sorteo.

1.2. Cómo sería el sorteo sometido sólo a la primera restricción

Para entender mejor el problema, se comienza considerando el caso en que todos los equipos sean tratados por igual en esa fase y puedan enfrentarse con todos en las mismas condiciones, pero sometidos a la restricción primera de la UEFA, es decir, cada primero de grupo puede enfrentarse a cada segundo de grupo independientemente de los grupos a que pertenezcan ambos.

Como se trata de 8 equipos primeros de grupo y 8 equipos segundos de grupo, el número de resultados posibles del sorteo, entendiendo como resultado el conjunto de las 8 parejas de equipos que jugarán entre sí esta fase de la eliminatoria, es en este caso 8!, que es el número de permutaciones sin repetición diferentes posibles de 8 equipos, es decir, 40320 posibles resultados. Por tanto, si se asigna una probabilidad idéntica, como criterio de equidad, a todos los posibles resultados del sorteo, esa probabiliddad es $1/40320$.

Estos resultados conducen, en este primer caso, a unas probabilidades de enfrentamientos que son las de la Tabla 1 adjunta, que muestra los 64 posibles emparejamientos en caso de sacar uno al azar y observar los equipos primero y segundo de grupo elegidos. Sus probabilidades son idénticas en este caso e iguales a $1/64$. Nótese que un criterio de equidad, que también se satisface en este caso, es que estas probabilidades, referidas ahora a emparejamientos, son también iguales. Este criterio no podrá satisfacerse cuando se impongan las tres restricciones de UEFA, como veremos luego.

Hay que señalar que la tabla 1 define una función de probabilidad, pues los valores en sus celdas suman la unidad y son no negativos. y que la variable aleatoria a que se refiere es una variable bidimensional que contiene el equipo segundo de grupo, con ocho valores posibles, y el primero de grupo, con otros ocho. El experimento aleatorio al que corresponde consiste en considerar, en este caso, todos los sorteos posibles, es decir, los ocho emparejamientos entre subcampeones y campeones, y luego elegir un emparejamiento al azar entre todos los resultantes de los sorteos, teniendo en cuenta que cada sorteo aporta ocho emparejamientos.

Las dos funciones de probabilidad marginales, que se muetran en las partes baja y derecha de la tabla, corresponden a los equipos segundo y primero de grupo, respectivamente, y son uniformes, es decir, toman el mismo valor, 1/8, para todos ellos.

Tabla 1: Probabilidades a priori de los 64 emparejamientos posibles, que se suponen a priori distribuciones uniformes, cuyas probabilidades marginales también uniformes. Aunque no se muestran, también sus condicionadas son uniformes.

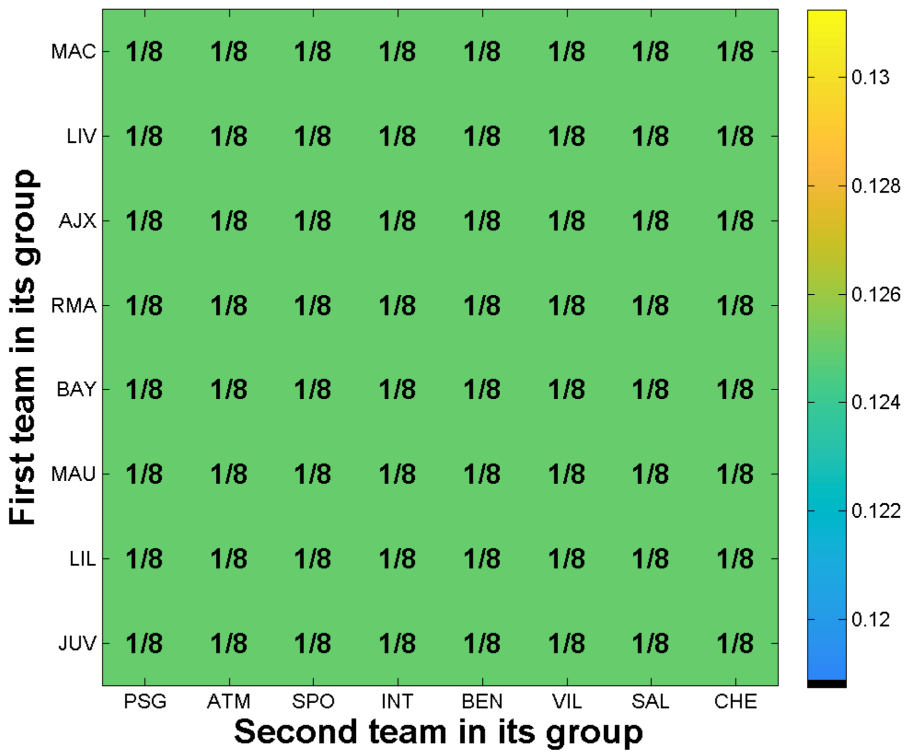
♯	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE	Margin.
MAC	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
LIV	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
AJX	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
RMA	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
BAY	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
MAU	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
LIL	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
JUV	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$
Margin.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Para obtener las probabilidades no de las parejas, sino de los equipos contrincantes de uno dado, habría que obtener las probabilidades condicionadas, es decir normalizar por filas o por columnas, según se tratara de un primero o un segundo de grupo respectivamente. Al hacerlo, se obtendría una tabla en la que todas las celdas tendrían el valor 1/8, como muestra la Tabla 2. Entonces, la tabla contendría en sus filas y columnas 16 funciones de probabilidad, con lo que la tabla ya no correspondería a una función de probabilidad, pues los valores de todas sus celdas sumarían ocho en vez de la unidad. En este trabajo se usan los dos tipos de tablas, que como se ha indicado representan cosas diferentes que no hay que confundir.

Es interesante observar que en este caso al normalizar por filas se obtiene lo mismo que al hacerlo por columnas y viceversa. Ésta es una propiedad curiosa e interesante que tiene que cumplirse si las parejas se sacan, tal como acabamos de indicar, de los 8 emparejamientos, es decir, de los resultados finales del sorteo, en los que todos los equipos tienen que aparecer solamente una vez.

La tabla que resulta es este caso es la Tabla 2, que muestra cómo las probabilidades de cada equipo de enfrentarse con cada uno de los otros equipos son las mismas considerando

Tabla 2: Probabilidades condicionales de las parejas de cada equipo, resultantes de normalizar por filas o columnas (da lo mismo) mostrando idénticas probabilidades con cada equipo de los posibles.



solamente los equipos posibles, lo que ilustra la idea de equidad.

Por tanto, si no existiese más restricción que la primera acerca del emparejamiento de los equipos del primero y el segundo de cada grupo, de ocho equipos cada uno, el problema de la adjudicación de las parejas sería trivial ya que las probabilidades de emparejamiento serían todas iguales a $1/64$, tal como se indica en la Tabla 1, en la que los emparejamientos de los equipos primeros de grupo corresponden a las filas de la tabla, y los emparejamientos de los equipos segundos de grupo, a las columnas de la misma. Nótese que, al colocar los equipos por orden de grupos, las entradas en las diagonales corresponden a los enfrentamientos entre los primeros con los segundos del mismo grupo.

Como todas las filas y todas las columnas tienen la misma probabilidad, que es $1/64$, todos los equipos tienen las mismas probabilidades de estar en un emparejamiento elegido al azar.

Para hacer el sorteo y garantizar estas probabilidades, se podría proceder de varias maneras. Indicamos tres de ellas.

- Selección directa del resultado: Como en el sorteo se buscan los ocho emparejamientos entre primeros y segundos de grupo, y hay $!8{=}40320$ resultados posibles, bastaría elegir, al azar, un número del 1 al 40320 e identificar el resultado correspondiente en la lista previamente publicada de todos ellos. De esta forma se eligen los emparejamientos de todos los equipos de golpe, es decir, con un único sorteo.

- Selección secuencial por emparejamientos: Otra forma sería elegir las parejas, una a una, secuencialmente de la Tabla 1 la primera pareja al azar entre las 64 posibles, es decir, elegir un número entre 1 y 64 y seleccionar la pareja correspondiente. La segunda pareja se elegiría entre las 49 restantes que quedaran tras eliminar las filas y columnas de los equipos seleccionados en la primera pareja, Para ello se elegiría un número al zar entre 1 y 49. En el caso de la tercera, cuarta, hasta la séptima pareja, se eliminarían las filas y columnas de la tabla correspondientes a los equipos ya emparejados, quedando, 36, 25, 16, 9 y 4, respectivamente, eligiendo al azar. Tras elegir la pareja séptima, sólo quedaría una fila y columna, por lo que automáticamente, la pareja octava sería la única restante. De esta forma habría siete sorteos.

- Selección secuencial por equipos: Una tercera forma de hacerlo, que reproduciría el sorteo de la UEFA para esta fase, eligiendo primero un segundo de grupo y luego un primero, consistiría en preparar dos urnas, una con bolas de los 8 equipos segundos de grupo y otra, con los 8 equipos primeros de grupo. Se eligen bolas, una de un segundo y otra de un primero sin reemplazamiento y se van emparejando. Se procede así hasta que se agoten las urnas. Al no haber restricciones se garantiza la equidad del procedimiento y que el sorteo acaba sin problemas. De esta forma habría 14 sorteos, pues una vez elegidos 7 equipos de cada urna, los octavos quedarían fijados, sin sorteo.

1.3. Cómo es el sorteo UEFA con las tres restricciones impuestas

Sin embargo, el caso analizado hasta aquí no es el del sorteo de la UEFA, pues las dos últimas condiciones anteriores, que no han sido consideradas en este caso anterior, reducen este número 8!=40320 a solamente 4781 posibles resultados. La restricción de no poder enfrentarse cada primero con su segundo de grupo reduce este número a 7! =5040 y, finalmente, la de diferente nacionalidad, para equipos en grupos diferentes, la deja en 4781.

Si se opta por asignar la misma probabilidad a los 4781 resultados, es decir, 1/4781, la Tabla 3 da las probabilidades de los diferentes enfrentamientos entre cada uno de los equipos segundos con sus posibles primeros o de cada primero con sus posibles segundos, que lo hace por columnas y por filas, respectivamente. Esta tabla no sólo no es uniforme, sino que dista mucho de serlo, conduciendo a probabilidades muy diferentes.

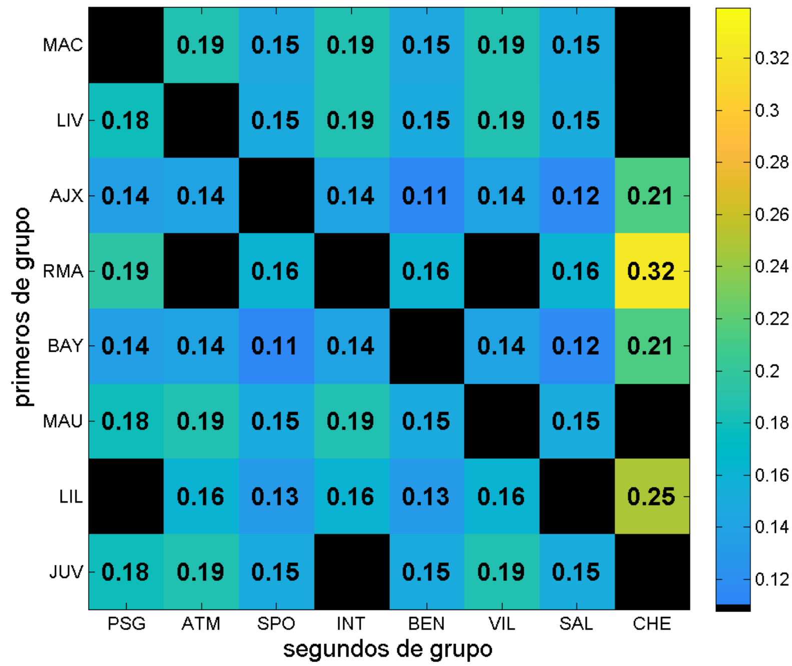
Además, muestra claramente cómo el Chelsea sólo puede enfrentarse a 4 equipos y el Real Madrid a 5, mientras que los demás pueden hacerlo a 6 o 7. Esto lleva a que la máxima probabilidad de enfrentamiento sea 0.32, muy por encima del resto.

Por tanto, puede verse cómo las restricciones de la UEFA, junto con su algoritmo para el sorteo, condicionan notablemente estas probabilidades y explican la probabilidad 0.32 de que el Chelsea se enfrente al Real Madrid, mientras que las probabilidades de enfrentarse al Ajax y al Bayern son 0.21 y la de enfrentarse al Lille es 0.25.

Esto también explica que el Real Madrid, además de esa probabilidad de enfrentarse al Chelsea, tiene una probabilidad 0.16, la mitad, de enfrentarse al Sporting de Portugal, al Benfica y al Salzburgo y una probabilidad 0.19 de enfrentarse al PSG.

Finalmente, ésta es también la causa de los altos valores las diferencias de las probabilidades de enfrentamiento del Ajax y del Bayern, que oscilan entre 0.11 y 0.21, y del Lille, que oscila entre 0.13 y 0.25, que precisamente son los otros equipos que, con el Real Madrid, se

Tabla 3: Probabilidades de los diferentes enfrentamientos entre cada uno de los equipos segundos con sus posibles primeros o de cada primero con sus posibles segundos, por columnas o por filas, respectivamente en el caso de que las probabilidades de los 4781 resultados posibles sean iguales.



pueden enfrentar al Chelsea. Por tanto, el hecho de que un determinado equipo, el Chelsea, pueda enfrentarse a muy pocos equipos altera mucho las probabilidades de enfrentamientos de esos pocos equipos, y tanto más cuanto menos opciones de enfrentamiento tengan.

Todas estas diferencias, producidas por las restricciones UEFA y el algoritmo elegido son demasiado grandes, lo que altera la equidad.

En este caso, una forma de sortear fiel a este criterio consiste en elegir al azar un número del 1 al 4781 y elegir, de golpe, los 8 emparejamientos de la lista correspondiente.

En este caso, las otras dos formas alternativas de proceder en el sorteo pueden conducir a no solución, es decir, a que al final queden equipos segundos y primeros de grupo que no puedan enfrentarse entre sí, por no cumplir las restricciones de diferente nacionalidad o de emparejamiento en la fase previa de grupos.

La descripción de cómo evoluciona el sorteo se muestra en la Figura 1, en la que, los círculos en negro se refieren a los emparejamientos ya producidos, y, en color amarillo, aparecen eliminados los emparejamientos no permitidos, a medida que se van extrayendo bolas de las urnas correspondientes a los dos grupos.

En ella se muestra un ejemplo, que sería el caso en el que las primeras 5 parejas, como ocurrió en el primer sorteo de la UEFA, fueran BEN-RMA, VIL-MAC, ATM-BAY, SAL-LIV e INT-AJX. En ese caso, quedarían para los tres segundos de grupo pendientes, PSG, SPO y CHE, como posibles primeros de grupo sólo MAU, LIL y JUV. Si al sortear el segundo de grupo saliera el SPO, que fue lo que ocurrió, no debería incluirse en el sorteo

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X							X
LIV		X						X
AJX			X					
RMA		X		X		X		
BAY					X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Situación inicial

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X							X
LIV		X						X
AJX			X					
RMA		X		X	●	X		
BAY					X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Primer emparejamiento: (BEN, RMA)

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X					●		X
LIV		X						X
AJX			X					
RMA		X		X	●	X		
BAY					X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Segundo emparejamiento: (VIL,MAC)

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X					●		X
LIV		X						X
AJX			X					
RMA		X		X	●	X		
BAY		●			X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Tercer emparejamiento: (ATM,BAY)

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X					●		X
LIV		X					●	X
AJX			X					
RMA		X		X	●	X		
BAY		●			X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Cuarto emparejamiento: (SAL,LIV)

⌗	1	2	3	4	5	6	7	8
MAC	X					●		X
LIV		X					●	X
AJX			X	●				
RMA		X		X	●	X		
BAY		●			X			
MAU						X		X
LIL	X						X	
JUV				X				X
	PSG	ATM	SPO	INT	BEN	VIL	SAL	CHE

Quinto emparejamiento: (INT,AJX)

Figura 1: Evolución de los emparejamientos del sorteo de la UEFA en las cinco primeras extracciones. Las X denotan las restricciones de incompatibilidad de las parejas posibles y los círculos en negro los emparejamientos ya producidos en cada momento del sorteo. Las filas y columnas de las parejas ya seleccionadas aparecen como filas y columnas en amarillo, significando que los pares correspondientes no son elegibles.

la bola del LIL, pues si saliera, quedarían sólo como primeros de grupo MAU y JUV, que no valdrían para el CHE, ya que CHE y MAU tienen la misma nacionalidad y CHE y JUV jugaron la misma fase de grupo. Por tanto, el programa de ordenador debe indicar que la bola del LIL no debe ser introducida en el bombo, lo que ocurrió y evitó un posible fracaso del sorteo.

Por tanto, es necesario disponer de un programa de ordenador que controle en todos los sorteos parciales si algunas de las bolas que se introducen para sortear y cumplen las restricciones UEFA deben no introducirse para evitar esta situación. Esto es lo que hace la UEFA con su programa. Sin embargo, esta actuación viola el criterio de equidad, por lo que ya no tienen todos los resultados la misma probabilidad.

Desgraciadamente, si no se hace público el programa y no se indica cómo se procede en estos casos, no se puede saber cuál es la probabilidad asignada a cada posible resultado.

En definitiva, el método de sorteo de la UEFA define la probabilidad de cada posible resultado mediante su algoritmo utilizado para sortear, que no es público, por lo que no puede reproducirse. Además, ni corresponde al caso de igual probabilidad para todos los resultados del sorteo posibles, ni es el óptimo desde el punto de vista de un concepto de equidad identificado..

Por supuesto que puede pensarse en algoritmos que eviten este problema, pero éstos asignarán también una probabilidad a cada resultado posible que no tiene por qué coincidir con el de la UEFA y de hecho no coincidirá siempre. En particular, el método indicado arriba, de sortear entre 1 y 4781, conduce a algoritmos de sorteo que mantienen ese criterio de equidad y, por tanto, no coinciden con el de la UEFA.

A falta de conocer el algoritmo usado por la UEFA, hemos diseñado un algoritmo que simula un sorteo como el suyo y que conduce a los emparejamientos de la tabla derecha de la Figura 2. Para ello, el método parte de las 4781 soluciones posibles, pues sólo una de ellas puede elegirse, y, a medida que va sorteando, va eliminando las que quedan excluídas, analizando las que quedan y comprobando si en el caso de colocar la bola de un determinado equipo en la urna y salir ese equipo en el sorteo parcial, se produce el caso de bloqueo, es decir, imposibilidad de solución, en cuyo caso, no se incluiría dicha bola en la urna. En caso contrario, se continúa al sorteo si hubiera más de una solución posible y, si sólo hubiera una, se asignarían a los restantes equipos aquellos que corresponden a esa única solución.

Para facilitar la comparación, se incluyen en la parte izquierda de la figura 2 la Tabla 3 de las probabilidades de los diferentes enfrentamientos entre equipos, en el caso de un sorteo que asigne iguales probabilidades a todos los resultados y en la parte derecha, las correspondientes a un sorteo como el diseñado por la UEFA. Como puede verse, los resultados son muy parecidos. Habría que ver si estos resultados coinciden con los correspondientes al método de sorteo de la UEFA, si ésta suministra la información necesaria para ello, pero las diferencias serán muy pequeñas, es decir tan deficientes como éstas.

Como se ha indicado, en este caso, la tabla que da las probabilidades de los diferentes enfrentamientos entre equipos en el caso de un sorteo análogo al de la UEFA, es decir, controlado para evitar el bloqueo del proceso de sorteo, es la Tabla derecha de la Figura 2, cuyos resultados se han optenido mediante 40.320.000 simulaciones, eligiendo los equipos segundos de todas las formas posibles (las 40320 permutaciones posibles) y simulando el proceso de asignación de sus correspondientes primeros equipos 1000 veces cada una, pero que pueden calcularse exactamente.

Si estas tablas se hicieran públicas y las conocieran, tanto los equipos implicados como

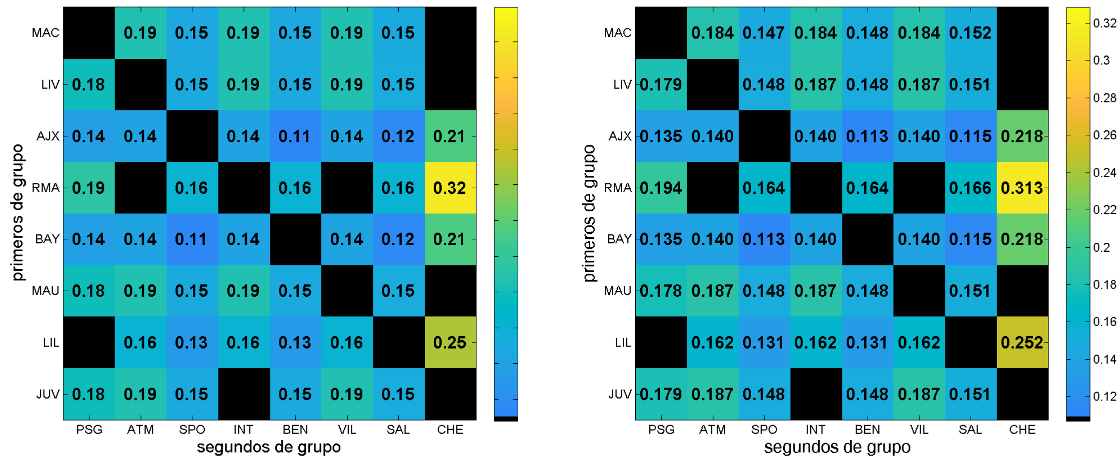


Figura 2: Tablas de las probabilidades de los diferentes enfrentamientos entre cada uno de los equipos segundos con sus posibles primeros o de cada primero con sus posibles segundos, por columnas o por filas, respectivamente en los casos de un sorteo que asigne iguales probabilidades a todos los resultados (tabla izquierda) y a un sorteo como el diseñado por la UEFA (tabla derecha).

sus seguidores, es casi seguro que serían contestadas con firmeza, pues las diferencias de probabilidades son enormes y distan mucho de lo que podría entenderse por equidad o de un coste razonable por perder parte de la misma.

2. Búsqueda de una solución más equilibrada

Dado que las tablas de la Figura 2 muestran grandes diferencias entre las probabilidades de enfrentamientos de los equipos, incluso dentro de las de los equipos, en esta sección se buscan otras soluciones más equilibradas.

La razón principal de este desequilibrio es la decisión de dotar a todos los posibles resultados del sorteo, los 4781, de la misma probabilidad o muy cercana a ella.

Una mejora de esta propuesta pasa por elegir otra densidad de probabilidad, en este espacio, que equilibre más las probabilidades de enfrentamientos dentro de los límites establecidos por la UEFA.

Por ello, hay que entender que el conjunto de posibles funciones de probabilidad, en el espacio de resultados, es el polítopo generado por las correspondientes a los 4781 resultados posibles. Este polítopo se genera mediante todas las combinaciones lineales convexas de las distribuciones de probabilidad que asignan probabilidad uno a uno de los 4781 y cero a los demás. Limitarlo al caso de probabilidades idénticas para todos ellos es una restricción añadida que causa mayor desigualdad entre equipos.

Al pasar al espacio de los enfrentamientos, puesto que la única solución que lleva a que los equipos tengan la misma probabilidad de entrentarse a todos aquellos a los que les está permitido, según las tres reglas de la UEFA, es la distribución uniforme, y no está entre las posibles, ésta no se puede alcanzar, por lo que, seguidamente, se buscan las más cercanas a ella usando cuatro criterios diferentes y, posteriormente, se comparan éstas con las soluciones obtenidas con los dos métodos anteriores.

Los criterios elegidos son los siguientes:

- **Criterio 1 : Suma de varianzas de filas y columnas.** Se minimiza la suma de las varianzas de las probabilidades de enfrentamientos de los 16 equipos, es decir las que corresponden a las 8 filas y las 8 columnas. Esta suma se anula solamente para la distribución uniforme y crece tanto más cuanto más crecen las diferencias entre las 49 celdas de las tablas.

- **Criterio 2 : Varianza total.** Se minimiza la varianza de las probabilidades de los 49 emparejamientos posibles de las tablas. Esta varianza es nula solamente cuando todas las probabilidades coinciden.

- **Criterio 3 : Rango.** Se minimiza el rango, es decir, la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la tabla. Este rango es nulo solamente cuando todas las probabilidades coinciden.

- **Criterio 4 : Máximo.** Se minimiza el valor máximo de la tabla. Este mínimo sería 8/49, pues la suma de las condicionales, por filas o por columnas es 8, para la distribución uniforme, si ésta fuera posible, y mayor que 8/49, para cualquier otra.

Hay que señalar que todos estos criterios, en caso de que fuera válida la distribución uniforme para todos los equipos, llevarían a ella como solución óptima, lo que justifica la elección de estos criterios, pues todos ellos llevan a la búsqueda de la solución más cercana a la uniforme, pero desde diferentes puntos de vista. Sin embargo, se verá que ésto no es posible.

Para obtener estas cuatro soluciones se ha utilizado la función fmincom de matlab, que permite minimizar esos criterios sometidos a las restricciones correspondientes.

Los resultados se muestran en la Figura 3, en la que se muestran las tablas correspondientes a las distribuciones de probabilidad óptimas del espacio de los 4781 resultados posibles de los criterios 1 a 4, así como de la correspondiente a la distribución uniforme y a la del método del sorteo usado por la UEFA, ordenadas de izquierda a derecha y de arriba abajo. Esta repetición facilita la comparación entre todas ellas.

De hecho, las tablas de la Figura 3 pueden obtenerse teniendo en cuenta que el conjunto de este tipo de posibles tablas es el polítopo generado por todas las combinaciones convexas de las tablas que se obtienen de los 49 emparejamientos posibles, asignándoles una probabilidad 1 y cero a los demás y generando las 16 distribuciones condicionadas, es decir, normalizandolas. Esto, junto con otras consideraciones, permite obtener las soluciones óptimas de la Figura 3 mediante problemas de optimización similares a los anteriores, pero mucho más sencillos, pues sólo implican 49 soluciones, en vez de 4781. Nuestros resultados, demuestran que esto es así. Con ello, el tiempo de computación de los 8 casos estudiados pasa de 20 horas de cálculo a dos minutos 40 segundos. Sin embargo, la función de probabilidad resultante en este espacio de 49 elementos, no permite realizar el sorteo directamente, lo que sí es posible con la función de probabilidad resultante en el espacio de los 4781 resultados.

De los resultados de las soluciones óptimas y con un simple vistazo a las tablas, se puede observar lo siguiente:

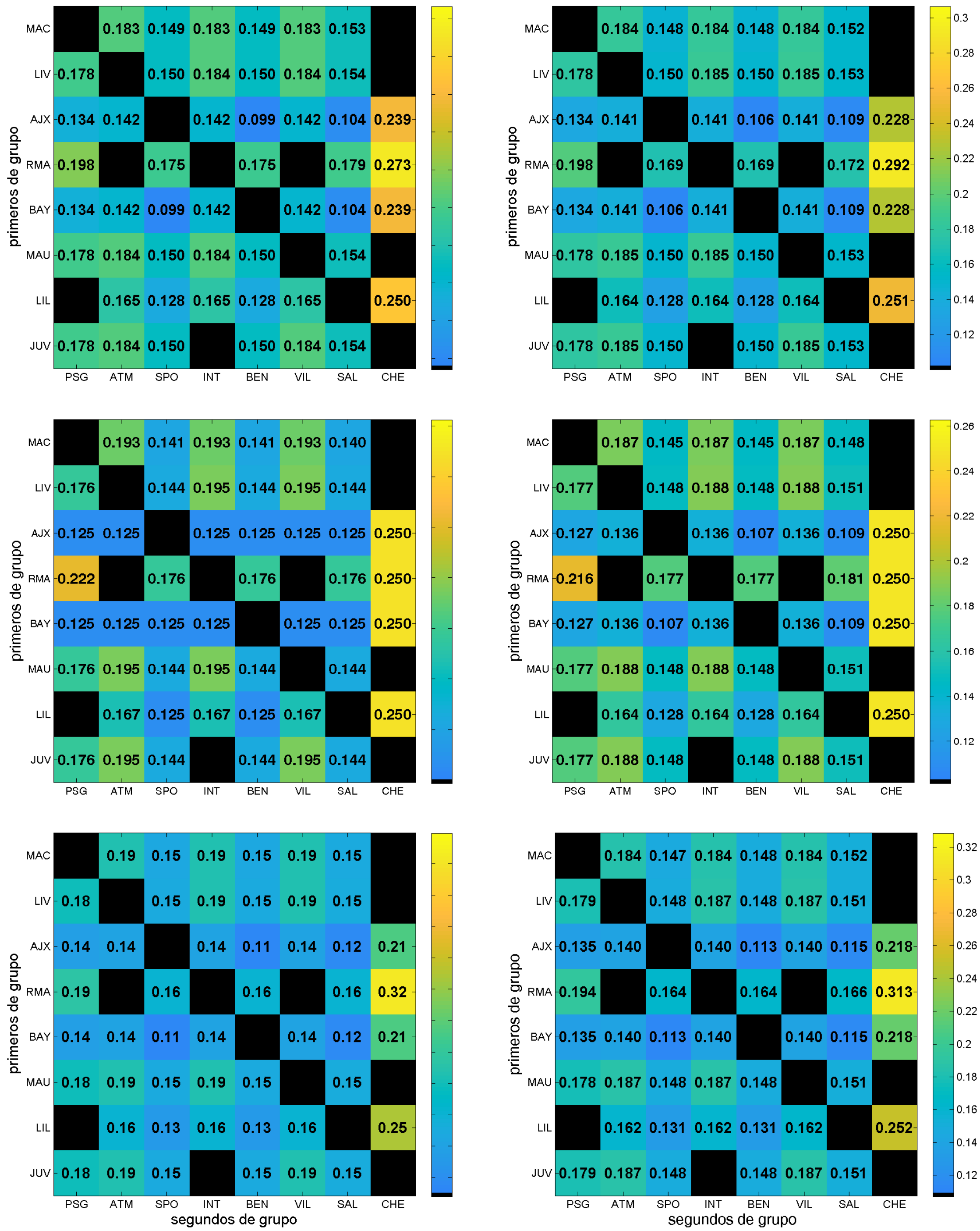


Figura 3: Tablas de probabilidades correspondientes a las soluciones óptimas obtenidas por criterios 1 a 4, junto con las probabilidades correspondientes a la distribución uniforme y al sorteo de la UEFA, ordenadas de izquierda a derecha y de arriba abajo.

1. Puesto que ninguno de los cuatro criterios, diseñados para acercarse lo máximo posible a la solución uniforme, obtiene como resultado esta distribución, hay que concluir que esta solución no es alcanzable, debido a las fuertes restricciones impuestas por la UEFA.

2. El criterio 3, basado en minimizar el rango, es decir, la diferencia entre la probabilidad máxima y la mínima de la tabla es, con mucho, el mejor resultado, siendo de destacar que la columna del Chelsea, que presentaba las mayores diferencias, resulta completamente equilibrada, con valores idénticos a 1/4=0.25. Además, dos del resto de esas filas, las de AJX y BAY, tienen una probabilidad en sus celdas igual a 1/8=0.125, que es además el mínimo de todas las de la tabla. La comparación de esta tabla con la del sorteo de la UEFA, muestra una mejoría muy grande en el sentido de equidad, entendida ésta como cercanía a la distribución uniforme medida mediante el rango. Nótese que, aunque las probabilidades no son todas iguales en sus filas y columnas, las diferencias extremas se han reducido notablemente.

3. En segundo lugar aparece el criterio 4, que se basa en minimizar la probabilidad máxima de la tabla. Los resultados son también bastante buenos, pero algo inferiores a los del criterio anterior, pues, al no controlar los valores mínimos, las diferencias entre probabilidades de las celdas son mayores. Hay que señalar que la solución del problema correspondiente a este criterio no tiene solución única, como lo demuestra el hecho de que el criterio 3 produce el mismo valor de la probabilidad máxima, que es 0.25. Por tanto, no tendría sentido usar esta solución, que suministra el programa de cálculo, sin alguna justificación explícita, cuando hay otra que también es óptima en este sentido y, además, es óptima según el criterio 3.

4. En tercer lugar aparece el criterio 1, que minimiza la suma de las varianzas por filas y columnas. Al compararlo con el de la UEFA, se observa una mejora importante. Por ejemplo, la probabilidad de la celda CHE-RMA pasa de 0.313 a 0.273, que es importante, pero no es el valor 0.25 de los criterios 3 y 4. Por tanto, se comprueba que este criterio aparece como menos satisfactorio que los criterios 3 y 4.

5. En cuarto lugar aparece el criterio 2, que minimiza la varianza total. También mejora los resultados de la UEFA, pero menos que los anteriores, pues la celda CHE-RMA pasa ahora de 0.323 a 0.292 en vez de a 0.273 o 0.25. Por tanto, puede considerarse inferior a los criterios 1, 3 y 4.

6. Finalmente, hay que considerar los dos últimos resultados, el de la distribución uniforme de los 4781 resultados, y el del sorteo de la UEFA, como inferiores a los 1 y 2, y muy inferiores a los 3 y 4, ya que sus diferencias con respecto a la distribución uniforme son mayores.

Antes de hacer una recomendación sobre el criterio que se considera mejor, hay que señalar que estos cuatro criterios no son los únicos que se han analizado en este estudio. En particular, se estudiaron también los crierios basados en minimizar la divergencia de Kullback-Leibler, la suma de las diferencias entre las probabilidades máximas y mínimas de cada fila y columna, la suma de los cocientes entre las probabilidades máximas y mínimas de cada fila y columna, y la suma de los cocientes entre las probabilidades mínimas y máximas de cada fila y columna, cambiada de signo. Sin embargo, los resultados fueron muy inferiores a los anteriores, por lo que no se han descrito en detalle aquí.

De hecho, el tener que renunciar a ellos puede entenderse como una pequeña frustración, sin embargo, entrañan una gran enseñanza que no puede ocultarse, como es la dificultad de representar matemáticamente un concepto o idea de lo que se desea estudiar. Para elegir la mejor tabla se tiene que tener una idea clara de lo que se considera como lo mejor, y ello hay que expresarlo matemáticamente, es decir, con una fórmula para evaluar las diferentes tablas. Por tanto, la pregunta que debemos hacernos es: ¿cómo hay que evaluar las tablas para decidir cuál es la mejor? Esta es una gran pregunta, muy difícil de contestar y que es seguro que dará lugar a varias respuestas dependiendo de la persona a la que se pregunta y propone la fórmula. Aquí se han estudiado 4 + 4 fórmulas diferentes, rango, varianzas, diferencias, sumas, etc. Sin embargo, una vez usadas y tras observar esos óptimos, hemos descubierto que, aunque esas diferentes fórmulas son todas válidas matemáticamente, no corresponden a la idea de equidad que teníamos en nuestra cabeza. Además, tendremos que admitir que no habíamos definido con precisión el concepto de equidad a nivel de cabeza. Por tanto, nuestra expresión matemática correspondiente difícilmente podría reproducir nada concreto y con precisión. Sólo, a posteriori, el estudio matemático de varias alternativas de fórmulas o conceptos de equidad, y posterior selección, nos ha permitido clarificar que el rango, diferencia entre el máximo y el mínimo de los 49 valores posibles de la tabla podemos adoptarlo como nuestra idea de equidad. Las matemáticas nos han ayudado a adoptar un concepto de equidad, cuando debería haber sido al revés, comenzar con nuestra idea y plasmarla, posteriormente, en la matemática.

No queremos entrar más aquí en esta profunda e interesante discusión y en su análisis, pues no es el objetivo de este trabajo, pero dejamos ahí la reflexión.

Por tanto, tras este análisis, se recomienda utilizar el criterio 3, el del mínimo rango correspondiente a las 49 probabilidades de las tablas, para obtener la distribución de probabilidad óptima correspondiente al espacio de las 4781 soluciones factibles, y proceder consecuentemente en el sorteo a realizar.

Tabla 4: Comparación de los diferentes criterios de equidad. Las filas se refieren a la distribución de probabilidad óptima usada. Las columnas indican el criterio de equidad elegido. Entre paréntesis se dan los órdenes que ocupan cada una de las distribuciones de probabilidad (filas) con respecto a cada uno de los criterios (columnas).

	Comparación de los diferentes criterios			
Probabilidad óptima	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3	Criterio 4
Criterio 1	**0.0134 (1)**	0.0013 (2)	0.1739 (3)	0.2730 (3)
Criterio 2	0.0138 (2)	**0.0013 (1)**	0.1864 (4)	0.2919 (4)
Criterio 3	0.0162 (5)	0.0014 (5)	**0.1250 (1)**	**0.2500 (1)**
Criterio 4	0.0142 (3)	0.0013 (4)	0.1434 (2)	**0.2500 (1)**
Uniforme	0.0161 (4)	0.0013 (3)	0.2096 (5)	0.3232 (5)

Para que puedan compararse los cuatro criterios elegidos, en la Tabla 4 se muestran los valores que se obtienen con los cuatro criterios si se usan las cuatro distribuciones de probabilidad óptimas y la uniforme. Entre paréntesis se dan los órdenes que ocupan cada una de las distribuciones de probabilidad (filas) con respecto a cada uno de los criterios (columnas).

Puede comprobarse que en la diagonal principal de la tabla aparecen los valores menores por columnas y filas, lo que nos permite comprobar que sus respectivas distribuciones de probabilidad dan ciertamente los valores óptimos de cada criterio, ya que entre paréntesis muestran el valor 1, que se refiere a primero.

Además, se comprueba que la distribución de probabilidad óptima del criterio 3 figura en primer lugar para los criterios 3 y 4.

El hecho de que esta distribución de probabilidad quede la última frente a los criterios 3 y 4 muestra que no es conveniente sortear con la probabilidad uniforme para los 4781 resultados posibles.

Finalmente, que las distribuciones de probabilidad uniforme quede mejor que la de los criterios 3 y 4 es irrelevante, una vez que nos hemos decantado por los criterios 3 y 4 como muy superiores a los 1 y 2.

Finalmente, en la Figura 4 se muestran las distribuciones de probabilidad de los 4781 resultados asociados a los valores óptimos de los criterios 1 a 4 y a la uniforme. Obsérvese que sólo se alcanzan un número muy pequeño de valores diferentes de las probabilidades, lo que sugiere que puede simplificarse el problema de optimización reduciendo el número de variables a optimizar, que en principio son 4780, pues deben sumar la unidad, pero que pueden agruparse por valores iguales para reducir su número, siempre que se sepa como hacer la agrupación.

3. Recomendación para el sorteo

En esta sección se indica una forma sencilla de hacer el sorteo que resulta de la tabla óptima del criterio 3.

Consiste en lo siguiente. Se colocan intervalos de longitud igual a las probabilidades resultantes en la asignación óptima a los 4781 resultados posibles, unos a continuación de otros y por orden, la longitud total final de esta superposición será 1, ya que son probabilidades y deben sumar la unidad.

Se elige a continuación un número aleatorio entre 0 y 1, por ejemplo con un generador de números aleatorios y suficiente precisión y se determina en cuál de los 4781 intervalos cae, siendo el correspondiente resultado el elegido. De no ser suficiente la precisión, podría quedar excluído alguno de los 4781 resultados posibles.

Si este tipo de sorteo se considerara demasido rápido y poco atractivo y emocionante, siempre puede comunicarse el resultado poco a poco, incluso simulando el sorteo actual, es decir comunicando el orden de los emparejamientos usando sorteos parciales de los equipos o parejas que se comunican antes o después.

4. Conclusiones y recomendaciones

Las conclusiones más importantes que se derivan de este estudio son:

1. El problema planteado por la UEFA está demasiado forzado por las condiciones impuestas que violan la equidad de forma grave, en el sentido de conducir a probabilidades de enfrentamientos de los equipos muy diferentes dependiendo de su nacionalidad y de la de los demás equipos, así como de la formación de los grupos y de los resultados habidos en la fase de grupos.

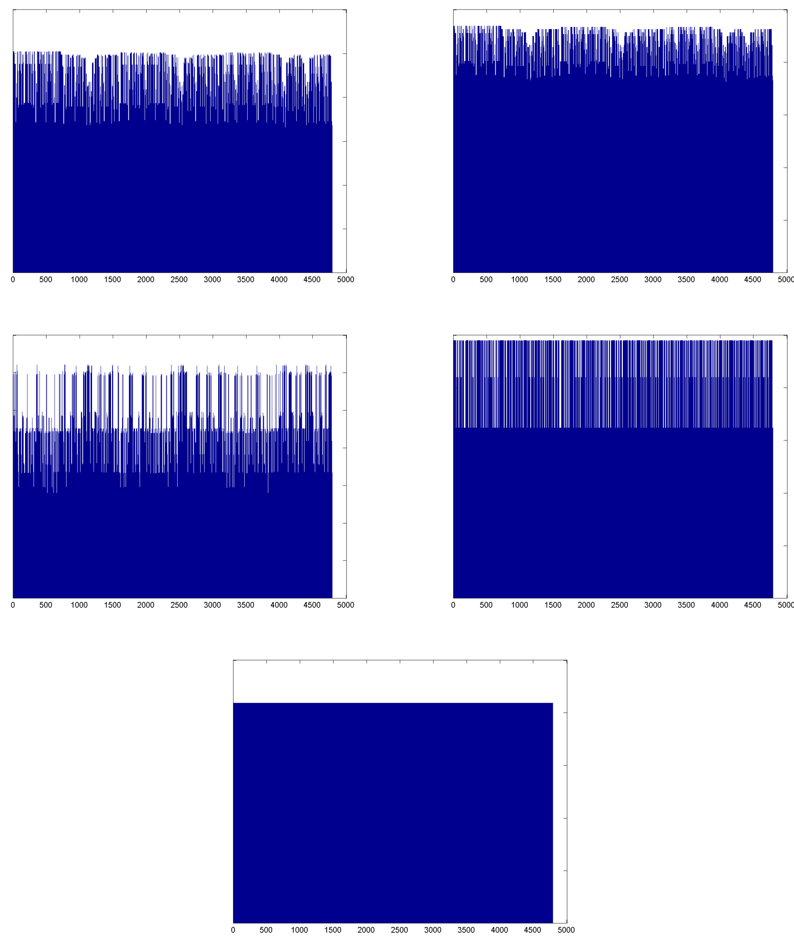


Figura 4: Funciones de probabilidad de los 4781 resultados asociados a los valores óptimos de los criterios 1 a 4 y a la uniforme, de izquierda a derecha y de arriba abajo.

2. Éste es el problema fundamental que afecta a la equidad, ya que deja poco margen de maniobra para mejorarla. Además, se aparenta un esfuerzo grande por la equidad, usando probabilidades uniformes en los sorteos secuenciales que implica el método elegido, cuando en realidad la parte más importante está ya decidida con unas probabilidades demasiado sesgadas en el sentido de poco equitativas.

3. El problema está incompletamente definido, pues, además de fijar el espacio muestral de todos los resultados válidos, deberían indicarse las probabilidades asociadas a cada uno de ellos, o fijar unos criterios que permitieran obtenerlos de forma única. En otras palabras, para definir el problema bien hay que dar el espacio muestral y la distribución de probabilidad conjunta o condiciones suficientes para determinarla.

4. Para que quede claro cómo funciona el sorteo de la UEFA hay que indicar en detalle cómo hacen el sorteo para conseguir que se llegue a una de estas 4781 posibles soluciones sin que éste quede bloqueado en ningún intento. De esta forma, habría completado la segunda condición, pero, en cualquier caso, a menos que lo justifique

con algún criterio de equidad u otro criterio razonable, la asignación de probabilidades habría sido arbitraria.

5. Al no conocerlo, no se puede comprobar, por personas ajenas a la UEFA, si el programa de ordenador usado garantiza un resultado válido en todos los casos sin necesidad de repetirlo más de una vez.

6. La UEFA debería dar a conocer, a equipos y aficionados, las probabilidades, de los diferentes enfrentamientos entre equipos, implicadas por el algoritmo del sorteo elegido, para que conozcan el fondo de lo que las tres condiciones de la UEFA acarrea. Nos referimos a las tablas de la Figura 2. En caso de hacerlo, hay razones para pensar que las tres condiciones serían muy contestadas y posiblemente rechazadas por equipos y aficionados, especialmente porque esas probabilidades pueden mejorarse bastante, desde el punto de vista de la equidad, y no se ha hecho.

7. El método usado por la UEFA para el sorteo, fija las probabilidades arbitrariamente y es, además complicado y sujeto a errores, siendo necesario controlar el sorteo para evitar el bloqueo del proceso. Este método parece estar basado en el criterio de equidad consistente en asignar a todos los posibles resultados del sorteo, los 4781 indicados, la misma probabilidad, pero no lo consigue, aunque queda muy cerca. Para este objetivo bastaría sortear al azar entre los 4781 resultados y elegir el correspondiente, sin que hubiera que preocuparse de ninguna incidencia que bloqueara el proceso.

8. En este informe, se ha demostrado que existe la posibilidad de mejorar bastante las probabilidades de emparejamiento de los equipos, pasando de las tablas de la Figura 2 a las que corresponden al criterio 3. Ello permite un método alternativo de sorteo que respeta estas nuevas probabilidades. Para ello habría que sortear cada uno de los posibles resultados con la distribución de probabilidad óptima y no, con la uniforme, tal como se ha descrito en este trabajo.

9. En caso de usar esta propuesta, si se desea dar emoción extra al sorteo, puede desvelarse el resultado haciéndolo secuencialmente, incluso sorteando el orden de los equipos segundos de grupo e indicando su contrincante primero de grupo, uno a uno. Ello llevaría a un procedimiento similar al existente, pero en el que los sorteos intermedios se sustituirían por la revelación del contrincante, obtenida de la solución sorteada, pero no desvelada todavía.

10. Finalmente decir que lo que más rompe la equidad son las reglas de la UEFA, por lo que una mejora sustancial adicional de la equidad pasaría por romper las tres reglas indicadas.

5. Agradecimiento

Los autores agradecen las discusiones con Javier Jiménez Sendín que han enriquecido y mejorado el resultado de este trabajo y su apoyo a la elaboración de las tablas.